

Динамика пыли при моделировании молодых околозвездных дисков: учет полидисперсности и объема твердых частиц, вычислительные проблемы и некоторые аналитические решения

Ольга Стояновская

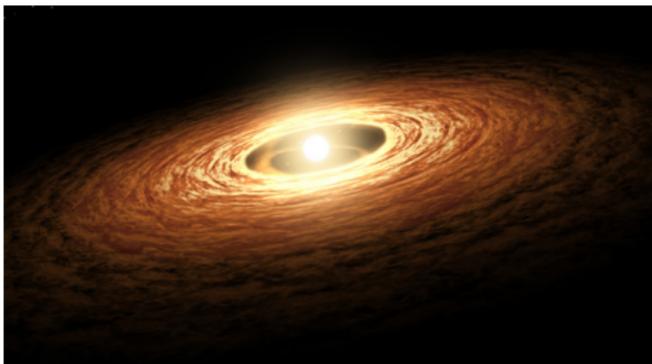
и

Виталий Акимкин, Эдуард Воробьев, Ярослав Павлюченков
ИНАСАН

и

Максим Арендаренко, Максим Давыдов, Татьяна Глушко, Виталий Григорьев,
Елизавета Исаенко, Тамара Маркелова, Валерий Снытников
Институт гидродинамики им М.А.Лаврентьева СО РАН, НГУ

Динамическая и химическая эволюция протопланетных дисков
4 марта 2021



$$\frac{\partial \Sigma_g}{\partial t} + \nabla \cdot (\Sigma_g \mathbf{v}) = 0, \quad \frac{\partial \Sigma_{d,sm}}{\partial t} + \nabla \cdot (\Sigma_{d,sm} \mathbf{v}) = -S(a), \quad \frac{\partial \Sigma_{d,gr}}{\partial t} + \nabla \cdot (\Sigma_{d,gr} \mathbf{u}) = S(a),$$

$$\Sigma_g \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \right) = -\nabla p + \frac{\Sigma_{d,gr}(\mathbf{u} - \mathbf{v})}{t_{\text{stop}}} + \Sigma_g \nabla \Phi + (\nabla \cdot \Pi),$$

$$\Sigma_{d,gr} \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \right) = \frac{\Sigma_{d,gr}(\mathbf{v} - \mathbf{u})}{t_{\text{stop}}} + \Sigma_{d,gr} \nabla \Phi + S(a) \mathbf{v}, \quad t_{\text{stop}} = \frac{a \rho_s}{c_s \rho_g}$$

$$\frac{\partial \mathbf{e}}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{e} \mathbf{v}) = -\rho(\nabla \cdot \mathbf{v}) - \lambda + \gamma + \gamma_{\text{visc}},$$

- В сеточных методах и в SPH - интенсивное межфазное взаимодействие
 - Для явных методов временной шаг должен удовлетворять условию устойчивости

$$\tau < t_{\text{stop}},$$

- неявные методы и методы, основанные на экспоненциальном решении, могут давать низкую точность, если неудачно скомбинированы с методом расщепления по физическим процессам (Stoyanovskaya+2017).

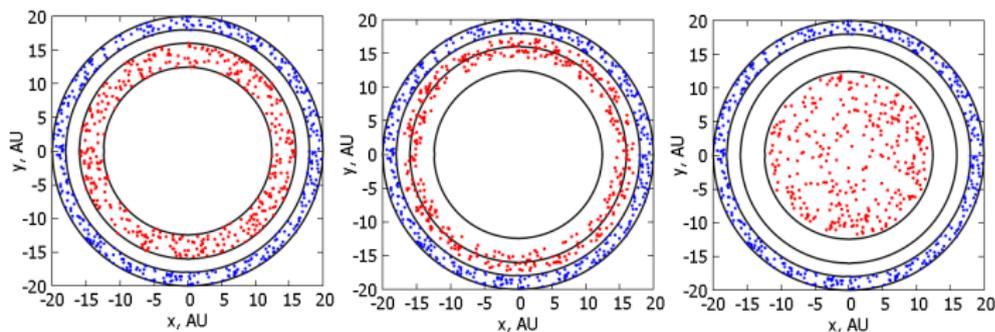


Рис.: Синие точки - положение пылевых частиц со $St = 2 \times 10^{-3}$ в начальный момент времени, красные - через 116 000 лет, черные линии - аналитическое предсказание границы кольца. Разные панели показывают расчет разными методами.

- В SPH дополнительная сложность - если скорость газа и скорость частиц известны в разных точках пространства, точность решения будет зависеть от способа их пересчета в одну точку.

Решение проблемы с t_{stop}

- Решение проблемы малого t_{stop} - методы сохраняющие асимптотику (Asymptotic preserving schemes, AP) e.g. *Jin and Livermore, 1996, Jin 2010*.
- AP-методы по вычислительным затратам как явные, но не требуют выбора $\tau < t_{\text{stop}}$.

Подход 1 к конструированию AP-схем-явная аппроксимация

$$\frac{\partial v}{\partial t} = a_g - \varepsilon^n \frac{v - u}{t_{\text{stop}}}, \quad \frac{\partial u}{\partial t} = a_d + \frac{v - u}{t_{\text{stop}}}, \quad \varepsilon = \frac{\rho_d}{\rho_g}.$$

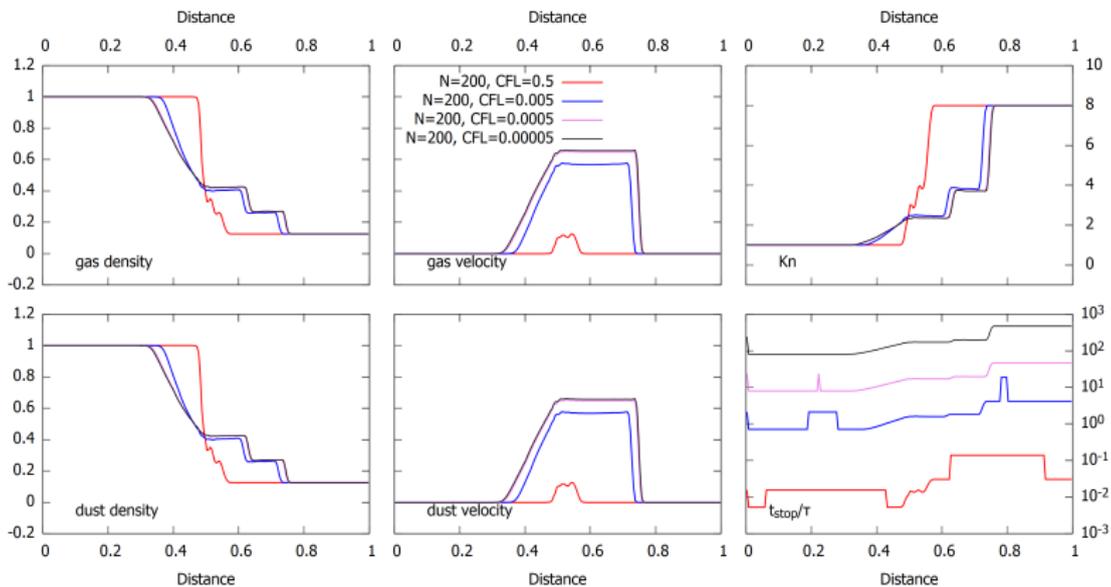
Схема 1 - низкая точность при $\tau < t_{\text{stop}}$, так как $err = Const \frac{\tau}{t_{\text{stop}}}$, **не является AP**

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{v^{n+1} - v^n}{\tau} = a_g^n - \varepsilon^n \frac{v^{n+1} - u^n}{t_{\text{stop}}}, \\ \frac{u^{n+1} - u^n}{\tau} = a_d^n + \frac{v^{n+1} - u^{n+1}}{t_{\text{stop}}}. \end{array} \right.$$

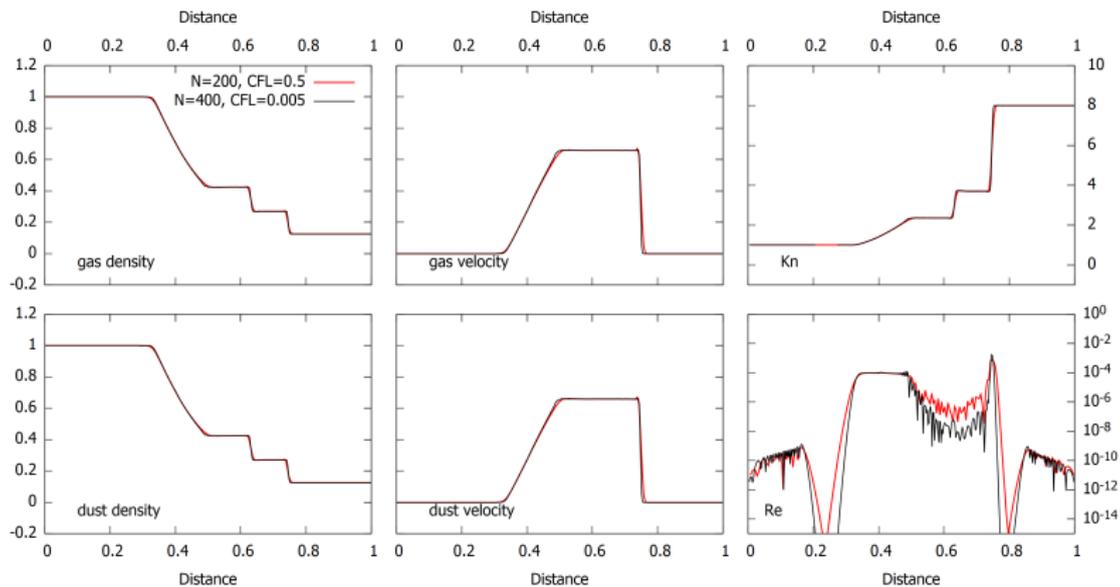
Схема 2 - чем меньше t_{stop} при фиксированном τ , тем точнее решение, так как $err = o(t_{\text{stop}}) \frac{\tau}{t_{\text{stop}}}$, **является AP**

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{v^{n+1} - v^n}{\tau} = a_g^n - \varepsilon^n \frac{v^{n+1} - u^{n+1}}{t_{\text{stop}}}, \\ \frac{u^{n+1} - u^n}{\tau} = a_d^n + \frac{v^{n+1} - u^{n+1}}{t_{\text{stop}}}. \end{array} \right.$$

Результаты расчета по схеме 1



Результаты расчета по схеме 2



Подход 2 к конструированию AP-схем-экспоненциальное решение

$$\frac{\partial v}{\partial t} = a_g - \varepsilon \frac{v - u}{t_{\text{stop}}}, \quad \frac{\partial u}{\partial t} = a_d + \frac{v - u}{t_{\text{stop}}}, \quad \varepsilon = \frac{\rho_d}{\rho_g}.$$

В силу того, что в каждый момент времени a_g , a_d , t_{stop} , ε являются константами, решение уравнений может быть найдено аналитически:

$$E = \frac{C_1 + (a_g + \varepsilon a_d)\tau}{\varepsilon + 1}, \quad D = \frac{C_2}{\varepsilon + 1} e^{-\frac{\varepsilon + 1}{t_{\text{stop}}}\tau} + \frac{(a_g - a_d)t_{\text{stop}}}{(\varepsilon + 1)^2}, \quad (1)$$

$$C_1 = v^n + \varepsilon u^n, \quad C_2 = v^n - u^n - \frac{(a_g - a_d)t_{\text{stop}}}{\varepsilon + 1}, \quad (2)$$

$$u^{n+1} = -D + E, \quad v^{n+1} = \varepsilon D + E. \quad (3)$$

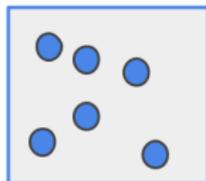
- Для монодисперсной пыли подходы 1 и 2 являются близкими как по точности, так и по вычислительным затратам,
- Оба подхода реализованы в FEOSAD,
- Подход 2 с экспоненциальным решением сложно распространить на случай полидисперсной пыли с большим количеством фракций.

AP-методы для динамики газопылевых сред в приложении к протопланетным дискам

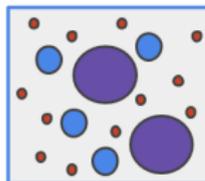
- Чтобы метод расчета динамики газопылевых сред был AP-методом, нужно чтобы закон сохранения импульса выполнялся с машинной точностью локально. Это относительно просто обеспечить в сеточных методах и сложнее в методах частиц.
- Для монодисперсной пыли AP-методы известны для всех подходов
 - эйлеров-эйлеров Zhu+2012, Stoyanovskaya+2018, Vorobyov+2018, на адаптивных сетках Lebreuilly+2019
 - эйлеров-лагранжев подход Yang & Johansen 2016
 - лагранжев одножидкостный подход, метод SPH Laibe & Price 2012
 - лагранжев двухжидкостный подход SPH Stoyanovskaya+2018, Price & Laibe 2020
- Для полидисперсной пыли AP методы известны для следующих подходов
 - эйлеров-эйлеров Benitez-Llambay+2019
 - лагранжев одножидкостный подход Hutchison+2018
 - лагранжев двухжидкостный подход Stoyanovskaya+2021
- Во всех упомянутых выше моделях считается, что **пылевые частицы занимают пренебрежимо малый объем**. Обосновано ли это предположение в областях высокой концентрации пыли - кольцах, самогравитирующих клампах, локациях катастрофических событий и приливного разрушения планет и т.п.?
- **Насколько нам известно, опубликованных работ по AP-методам для газопылевых сред с учетом объема пыли сейчас нет.**

Смесь газа и пылевых частиц. Основные допущения

- Смесь представляет собой двухфазную полидисперсную среду с общим давлением, в которой несущей фазой является сжимаемый невязкий газ с плотностью ρ , скоростью v и внутренней энергией e .
- Газ содержит N фракций дисперсных включений, различающихся между собой по размеру частиц.



monodisperse
mixture



polydisperse mixture
with 3 fractions

- Для каждой фракции выполняется условие применимости гидродинамического описания среды и определены осредненные по пространству величины - u_i - скорость, ρ_i - массовая плотность, t_i - время релаксации скорости частиц к скорости газа.
- Частицы всех фракций состоят из одного и того же вещества материальной плотности ρ_s , имеют сферическую форму.
- Частицы занимают в пространстве конечный объем.
- Массообмен и теплообмен между газом и частицами отсутствуют.
- Все фракции пыли обмениваются импульсом с газом, но не между собой.

$$\frac{\partial \rho_g}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla \rho_g) = -\rho_g \nabla \mathbf{v},$$

$$\frac{\partial \rho_i}{\partial t} + (\mathbf{u}_i \cdot \nabla \rho_i) = -\rho_i \nabla \mathbf{u}_i, \quad i = 1, \dots, N,$$

$$\rho_g \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v}) \right) = -(1 - \theta) \nabla p_g + \sum_{i=1}^N \frac{\rho_i (\mathbf{u}_i - \mathbf{v})}{t_i},$$

$$\rho_i \left(\frac{\partial \mathbf{u}_i}{\partial t} + (\mathbf{u}_i \cdot \nabla \mathbf{u}_i) \right) = -\theta_i \nabla p_g - \frac{\rho_i (\mathbf{u}_i - \mathbf{v})}{t_i}, \quad i = 1, \dots, N,$$

$$\theta_i = \frac{\rho_i}{\rho_s}, \quad \theta = \sum_{i=1}^N \theta_i, \quad p_g = \frac{c_s^2 \rho_g}{1 - \theta},$$

$$t_i = \frac{a_i \rho_s}{c_s \rho_g}.$$

t_i является малым параметром задачи, если радиусы пылевых частиц a_i малы

- При $\theta = 0$ система имеет негиперболический тип: N пар вещественных собственных значений u_i , а также $v \pm c_s$, жорданова форма матрицы недиагональна.
- При $\theta > 0$ исследования сильно сложнее. Есть публикации, что тип системы определяется параметрами (гиперболический, составной,.. Федоров А.В., Хмель Т.А., Панов А.В. и коллеги).

- Рассматриваем систему уравнений изотермический газ-объемная полидисперсная пыль в 1D случае;
- рассматриваем линейризованную систему, выписываем для нее дисперсионное соотношение, находим ее частное решение методом Фурье. В случае конечных t_i частное решение линейризованной задачи о распространении волн DustyWave находим численно;
- из дисперсионного соотношения находим скорость звука в двухфазной среде c_s^* в предельных случаях для $t_i \rightarrow 0$ (**релаксационное равновесии**) и $t_i \rightarrow \infty$ (**вмороженное равновесие**); в предельных случаях частное решение линейризованной задачи DustyWave о распространении звуковых волн выписываем аналитически;
- используем решения задачи DustyWave как эталонное при тестировании свойств численных методов **на исходной нелинейной задаче**, подбирая параметры, при которых решения исходной и линейризованной систем близки.
- используем релаксационную скорость звука для генерации 1D решений задачи Сода о распаде разрыва DustyShock **с нелинейными волнами**.

| Предельный случай $t_i \rightarrow 0$ | Непредельный случай t_i конечно | Предельный случай $t_i \rightarrow \infty$ |
|--|---|--|
| мгновенный | Обмен импульсом между фазами за конечное время | отсутствует |
| Релаксационное равновесие | - | Вмороженное равновесие |
| $c_s^* = \frac{c_s}{(1 - \theta)\sqrt{1 + \varepsilon}}$ | Скорость звука может быть найдена численно | $c_s^* = c_s \sqrt{\frac{\theta^2}{(1 - \theta)^2 \varepsilon} + 1}$ |

Таблица: $\theta = \sum_i \theta_i, \varepsilon = \sum_i \varepsilon_i$

- Dustywave - задача о распространении звуковых волн малой амплитуды
 - $N = 1, \theta = 0, t_i \rightarrow 0$ Marble 1972,
 - $N = 1, \theta = 0, t_i$ -конечно, Laibe & Price 2012,
 - N -любое, $\theta = 0, t_i$ -конечно, Benitez-Llambay 2019,
 - $N = 1, \theta > 0, t_i \rightarrow 0, t_i$ -конечно - **новые результаты**.
- Dustyshock - задача Сода о распаде разрыва
 - $N = 1, \theta = 0, t_i \rightarrow 0$, Laibe & Price 2012,
 - N -любое, $\theta = 0, t_i \rightarrow 0$, **Stoyanovskaya et al. 2021**

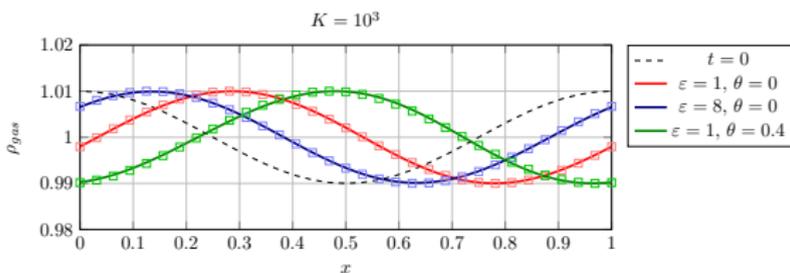


Рис.: Сравнение численных расчетов сеточным методом с аналитическим решением задачи о распространении звуковой волны в газопылевой среде при малых временах релаксации на момент времени $t = 0.4$. Черным пунктиром обозначено начальное состояние плотности газа, цветными сплошными линиями — численный расчет, цветными квадратиками — эталонное решение.

Дисперсионное соотношение

$$S(\omega) \equiv \omega(\omega^2(1 + \varepsilon) + k^2 c_s^2 (1 + \frac{\theta}{1 - \theta})^2) = 0.$$

Эталонное решение

$$\rho_g(x, t) = 1 + \Delta \cos(2\pi(kx - c_s^* t)), \quad \rho_d(x, t) = \varepsilon \rho_g(x, t), \quad (4)$$

$$v(x, t) = u(x, t) = c_s^* \Delta \cos(2\pi(kx - c_s^* t)) \quad (5)$$

при $\Delta \ll 1$, $t_{\text{stop}} \ll 1$,

$$c_s^* = \frac{c_s}{(1 - \theta)(\sqrt{1 + \varepsilon})}. \quad (6)$$

Dustywave, $N = 1$, $\theta > 0$, t_j -конечно

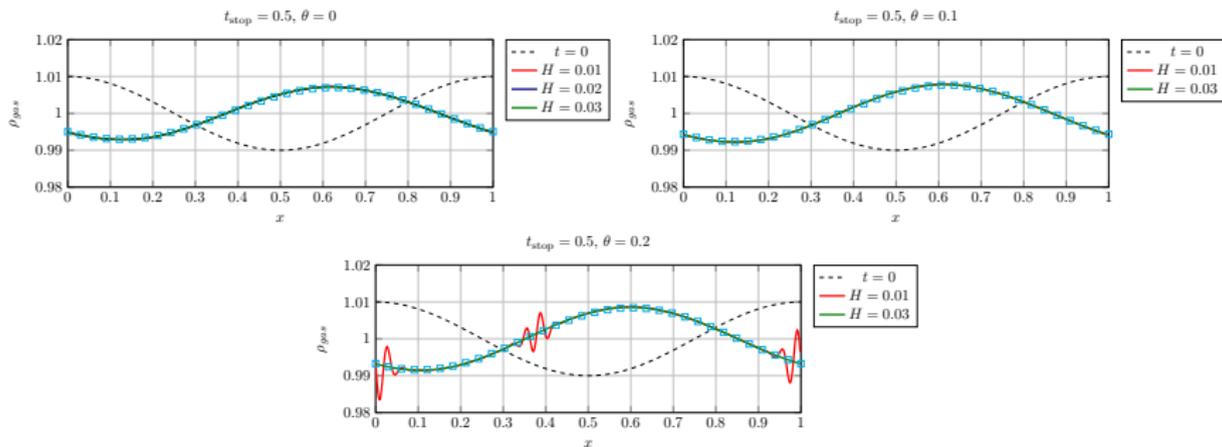


Рис.: Сравнение численных расчетов методом SPH с эталонным решением задачи о распространении звуковой волны в газопылевой среде при умеренном времени релаксации $t_{\text{stop}} = 0.5$ на момент времени $t = 0.4$. Черным пунктиром обозначено начальное состояние плотности газа, цветными сплошными линиями — численный расчет, цветными квадратами — эталонное решение.

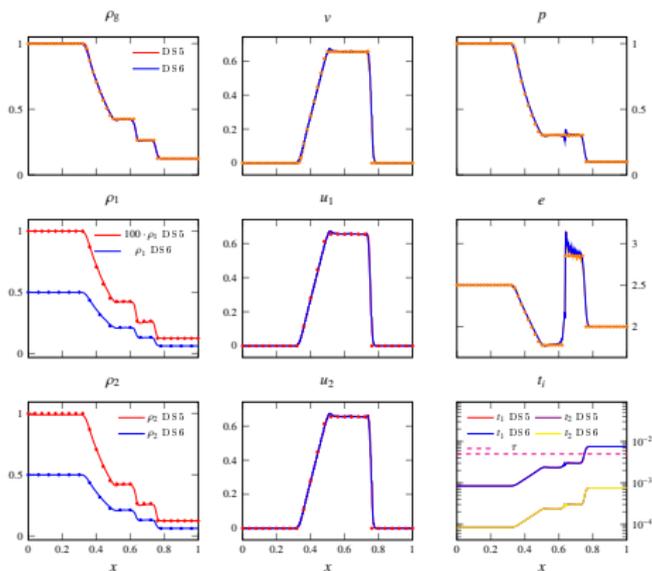
Дисперсионное соотношение

$$M(\omega) \equiv \omega^4 - \omega^3 \left(\frac{1 + \varepsilon}{t_{\text{stop}}} \right) + \omega^2 k^2 c_s^2 \left(1 + \frac{\xi^2}{\varepsilon} \right) - \omega k^2 c_s^2 \frac{(1 + \xi)^2}{t_{\text{stop}}} = 0,$$

где

$$\varepsilon = \frac{\rho_d}{\rho_g}, \quad \xi = \frac{\theta}{1 - \theta}.$$

DustyShock, $N = 2$, $\theta = 0$, $t_i \rightarrow 0$



Дисперсионное соотношение и релаксационная скорость звука

$$F(\omega, \omega_s) \equiv \omega^2 \left(1 + \sum_{j=1}^N \frac{\varepsilon_j}{1 - \omega t_j} \right) + k^2 c_s^2 = 0, \quad c_s^* = \frac{c_s}{(\sqrt{1 + \sum_i \varepsilon_i})}.$$

| | N | t_i or s_i | ε_i | N_{SPH} | h | τ |
|-----|-----|--------------------------|------------------------------|------------------|------|--------------------|
| DS5 | 2 | $s_i = 10^{-3}, 10^{-4}$ | $\varepsilon_i = 0.01, 0.99$ | 1180 | 0.01 | 5×10^{-3} |
| DS6 | 2 | $s_i = 10^{-3}, 10^{-4}$ | $\varepsilon_i = 0.5, 0.5$ | 1180 | 0.01 | 5×10^{-3} |

- Расчет трения между газом и пылью в FEOSAS реализован на основе AP-подходов,
- Чтобы убедиться, что реализованный метод расчета трения является AP-методом, существует система тестовых задач Dustywave, Dustyshock и т.п. (например, Laibe and Price 2012, Lebreuilly+2019, Benitez-Llambay+2019). В этих задачах считается, что пыль имеет пренебрежимо малый объем.
- В настоящий момент прикладываются усилия, чтобы распространить эти тестовые задачи на пыль ненулевого объема.

- Для системы уравнений газ-полидисперсная пыль (1,2,3 фракции) с ненулевой объемной долей выписано дисперсионное соотношение, определены аналитические представления для скорости распространения звуковых волн

- в режиме релаксационного равновесия $c_s^* = \frac{c_s}{(1-\theta)\sqrt{1+\varepsilon}}$,
- в режиме замороженного равновесия $c_s^* = c_s \sqrt{\frac{\theta^2}{(1-\theta)^2\varepsilon} + 1}$,

где $\theta = \sum_i \theta_i$, $\varepsilon = \sum_i \varepsilon_i$.

- Построено эталонное решение задачи Dustywave о распространении звуковых волн в среде газ-монодисперсные частицы с ненулевой объемной долей для $t_i \rightarrow 0$ и t_i -конечные. Решение для $t_i \rightarrow 0$ имеет аналитическое представление, решение для произвольного t_i генерируется численно. Генератор опубликован в свободном доступе
https://github.com/MultiGrainSPH/1D_Dust_DS/tree/master/DustyWave
- Построено эталонное решение задачи Сода о распаде разрыва в газопылевой среде DustyShock для произвольного количества фракций пыли, $\theta = 0$, $t_i \rightarrow 0$.
- Построенные решения подтверждены численными расчетами и рекомендуются к использованию в качестве эталонных при верификации программ численного моделирования, при исследовании свойств новых методов.

Исследование проведено за счет средств гранта РФФ 19-71-10026.

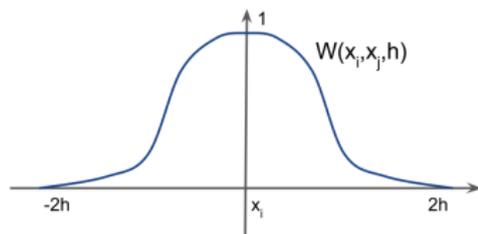
| Author | Relaxation Equilibrium | Frozen Equilibrium |
|--------|--|---|
| 1 | $\left(\frac{c_s}{c_s^*}\right)^2 = (1 + \varepsilon)$ | - |
| 2 | $\left(\frac{c_s}{c_s^*}\right)^2 = (1 + \varepsilon) \left(1 + (\gamma - 1) \frac{\varepsilon c_{dp}}{1 + \varepsilon \left(\frac{c_{dp}}{c_{gp}}\right)}\right)$ | $\left(\frac{c_s}{c_s^*}\right)^2 = 1 - \theta$ |
| 3 | $\left(\frac{c_s}{c_s^*}\right)^2 = (1 - \theta)[\theta\varepsilon + (1 - \theta)]$ | $\left(\frac{c_s}{c_s^*}\right)^2 = \frac{1}{1 + \frac{\theta}{(1 - \theta)\varepsilon}}$ |
| 4 | | |
| 5 | $\left(\frac{c_s}{c_s^*}\right)^2 = (1 + \sum_i \varepsilon_i)$ | - |
| * | $\left(\frac{c_s}{c_s^*}\right)^2 = (1 - \theta)^2(1 + \varepsilon)$ | $\left(\frac{c_s}{c_s^*}\right)^2 = \frac{1}{1 + \frac{\theta^2}{(1 - \theta)^2\varepsilon}}$ |

Таблица: Некоторые представленные в литературе значения для скорости звука в двухжидкостных моделях газопылевых сред. Здесь c_{dp} , c_{gp} - теплоемкость дисперсных частиц и газа при постоянном давлении. Источники: 1 — Marble 1970; 2 — Temkin 1992; 3 — Monaghan and Kocheryan 1995; 4 — Benitez-Llambay et al. 2019; 5 — Stoyanovskaya et al. 2021; * — эта работа.

- свободно-лагранжев метод;
- сплошная среда заменяется набором частиц;
- частицы - узлы интерполяции, в которых определены параметры среды;
- вычисление пространственных производных без использования сетки

$$f(x) = \int_{\Omega} f(x') \delta(x - x') dx' \approx \int_{\Omega} f(x') W(|x - x'|, h) dx' \approx \sum_{j=1} m_j \frac{f(x_j)}{\rho_j} W(|x - x_j|, h), \quad (7)$$

$$\rho_i = \sum_j m_j W(|x_i - x_j|, h), \quad \nabla f(x_i) = \sum_j m_j \frac{f(x_j)}{\rho_j} \nabla W(|x_i - x_j|, h) \quad (8)$$



J. J. Monaghan. Smoothed particles hydrodynamics, 1992

Расчет межфазного взаимодействия в гидродинамике сглаженных частиц - монодисперсная пыль

$$F_D = -\frac{1}{2} C_{DSp} \|u - v\| (u - v)$$

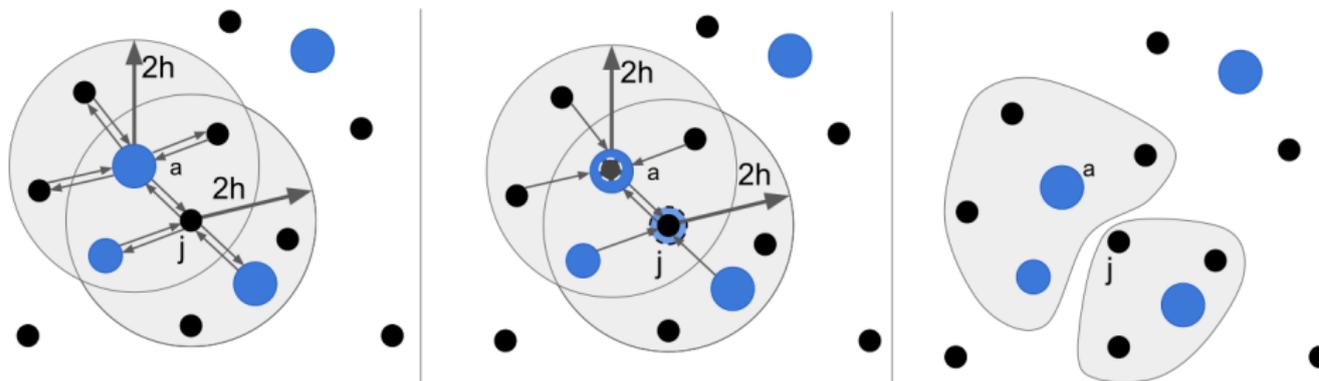


Рис.: Monaghan and Kocharyan 1996, Loren-Anguilar and Bate, 2014,2015, Stoyanovskaya et al. 2018

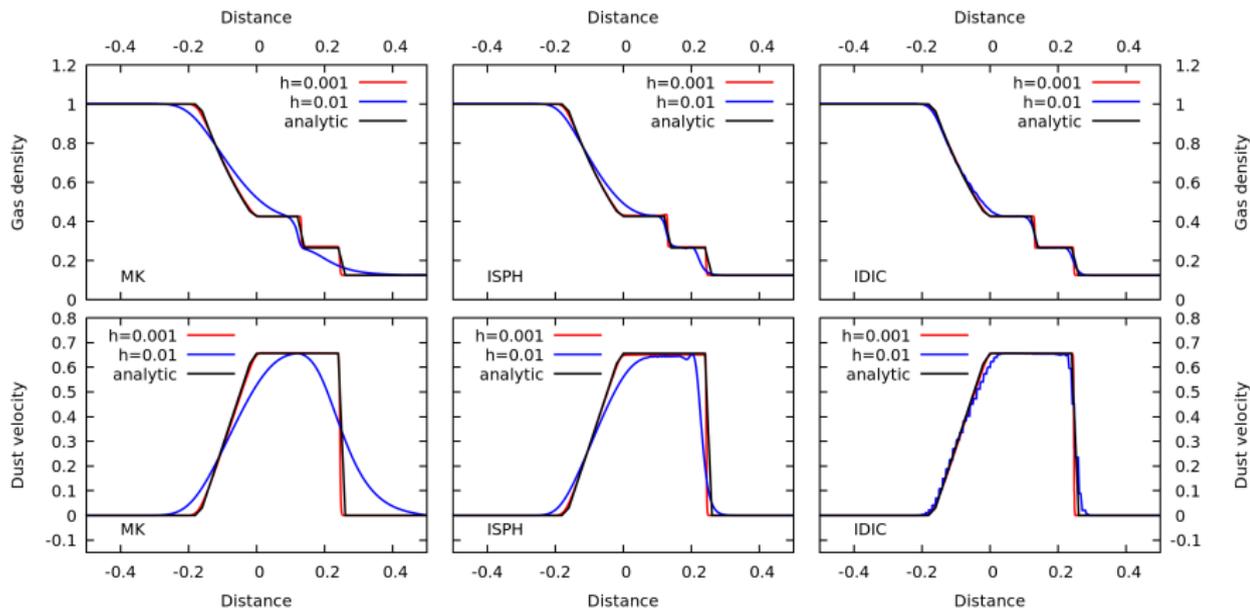


Рис.: Monaghan and Kocharyan 1996, Loren-Anguilar and Bate, 2014,2015, Stoyanovskaya et al. 2018

Расчет динамики среды газ-полидисперсная пыль в гидродинамике
сглаженных частиц.

Численный метод, сохраняющий асимптотику. Основные идеи

- Расчет основан на методе гидродинамика сглаженных частиц. Это свободно-лагранжев метод, в котором сплошная среда заменяется набором модельных частиц. Каждая частица является носителем массы, импульса и энергии среды.
- Несущий газ и каждая фракция дисперсной фазы моделируются разными наборами частиц.
- Все силы кроме межфазного взаимодействия рассчитываются на основе взаимодействия частица-частица. Межфазное взаимодействие рассчитывается на эйлеровой сетке.

Метод подробно описан в *Stoyanovskaya, Davydov, Arendarenko, Isaenko, Markelova, Snytnikov, Fast method to simulate dynamics of two-phase medium with intense interphase interaction. I. Gas-dust mixture with polydisperse particles, linear drag, one-dimensional tests // Journal of Computational Physics, 2021*

Пусть на временном слое n известны координаты, массы, плотности и скорости для всех частиц. Найдем их значения на слое $n + 1$.

ШАГ 0. В каждый момент времени будем разбивать всю расчетную область на непересекающиеся объемы таким образом, чтобы объединение этих объемов совпадало со всей областью. Пусть в отдельном объеме находится K газовых частиц одинаковой массы m_g и L_i пылевых частиц фракции i одинаковой массы m_i , причем $K > 0$, $L_i > 0$.

ШАГ 1. Вычислим средние по каждой ячейке значения величин на слое n следующим образом

$$v_*^n = \frac{\sum_{k=1}^K v_k^n}{K}, \quad u_{*i}^n = \frac{\sum_{l=1}^{L_i} u_{li}^n}{L_i}, \quad t_{*i}^n = \frac{\sum_{l=1}^{L_i} t_{li}^n}{L_i}, \quad (9)$$

$$\varepsilon_{*i}^n = \frac{m_i L_i}{m_g K}, \quad a_{*g}^n = \frac{\sum_{k=1}^K a_k^n}{K}, \quad a_{*i}^n = \frac{\sum_{l=1}^{L_i} a_{li}^n}{L_i}, \quad (10)$$

где $a_k^n = - \sum_b m_g \left(\frac{P_b^n}{(\rho_{b,g}^n)^2} + \frac{P_k^n}{(\rho_{k,g}^n)^2} + \Pi_{kb} \right) \nabla_k W_{kb}$, аналогично a_{li}^n .

ШАГ 2. Найдем средние по каждой ячейке скорости со следующего временного слоя u_{*i}^{n+1} , v_*^{n+1} .

Для этого положим

$$y^n = v_*^n + \sum_i \varepsilon_{*i}^n u_{*i}^n, \quad x_i^n = v_*^n - u_{*i}^n. \quad (11)$$

Тогда

$$y^{n+1} = y^n + \tau(a_{*g}^n + \sum_i \varepsilon_{*i}^n a_{*i}^n). \quad (12)$$

$$b_i = \frac{t_{*i}^n + \tau}{\varepsilon_{*i}^n \tau}, \quad \beta = 1 + \frac{1}{b_1} + \frac{1}{b_2} + \dots + \frac{1}{b_N}. \quad (13)$$

$$x_i^{n+1} = -\frac{t_{*i}^n}{\tau \varepsilon_{*i}^n \beta} \left[\frac{(1 - b_i \beta)(x_i^n + \tau(a_{*g}^n - a_{*i}^n))}{b_i^2} + \sum_{j \neq i} \frac{x_j^n + \tau(a_{*g}^n - a_{*j}^n)}{b_j b_j} \right]. \quad (14)$$

$$v_*^{n+1} = \frac{y^{n+1} + \sum_i \varepsilon_{*i}^n x_i^{n+1}}{1 + \sum_i \varepsilon_{*i}^n}, \quad u_{*i}^{n+1} = \frac{y^{n+1} - (1 + \sum_{j \neq i} \varepsilon_{*j}^n) x_i^{n+1} + \sum_{j \neq i} \varepsilon_{*j}^n x_j^{n+1}}{1 + \sum_j \varepsilon_{*j}^n}. \quad (15)$$

ШАГ 3. Вычислим скорости каждой газовой и пылевой частицы на слое $n + 1$.

$$\left(\frac{1}{\tau} + \sum_{i=1}^N \frac{\varepsilon_{*i}^n}{t_{*i}^n} \right) v_k^{n+1} = \frac{v_k^n}{\tau} + \sum_{i=1}^N \frac{\varepsilon_{*i}^n}{t_{*i}^n} u_{*i}^{n+1} + a_k^n, \quad \left(\frac{1}{\tau} + \frac{1}{t_{*i}^n} \right) u_{li}^{n+1} = \frac{u_{li}^n}{\tau} + \frac{1}{t_{*i}^n} v_*^{n+1} + a_{li}^n. \quad (16)$$

По найденным скоростям вычислим новые координаты

$$\mathbf{r}_{a,g}^{n+1} = \mathbf{r}_{a,g}^n + \tau \mathbf{v}_a^{n+1}, \quad \mathbf{r}_{il}^{n+1} = \mathbf{r}_{il}^n + \tau \mathbf{u}_{il}^{n+1}. \quad (17)$$

Плотности пыли и газа вычисляется путем интерполяции точечных масс, расположенных в частицах:

$$\rho_{a,g}^{n+1} = m_g \sum_b W_{ab}^{n+1}, \quad (18)$$

$$\rho_{il}^{n+1} = m_i \sum_m W_{lm}^{n+1}. \quad (19)$$

Вычисляем внутреннюю энергию:

$$e_a^{n+1} = e_a^n + \tau \left(\frac{m_g P_a}{(\rho_{a,g}^n)^2} \sum_b (v_a^n - v_b^n) \nabla_a W_{ab}^n + \frac{m_g}{2} \sum_b \Pi_{ab} (v_a^n - v_b^n) \nabla_a W_{ab}^n \right), \quad (20)$$

а затем по найденной внутренней энергии вычисляем давление

$$P_a^{n+1} = \rho_{a,g}^{n+1} e_a^{n+1} (\gamma - 1). \quad (21)$$

Разработан экономичный метод расчета динамики ламинарных потоков газа и твердых частиц для гидродинамики сглаженных частиц в приближении взаимопроникающих континуумов (газ и пыль моделируются разными наборами частиц):

- единый алгоритм расчета для интенсивного и слабого межфазного взаимодействия, который не вносит дополнительную диссипацию в решение,
- произвольная концентрация твердой фазы, учет влияния динамики дисперсной фазы на несущую,
- монодисперсная и полидисперсная твердая фаза.

Stoyanovskaya, Davydov, Arendarenko, Isaenko, Markelova, Snytnikov, Fast method to simulate dynamics of two-phase medium with intense interphase interaction. I. Gas-dust mixture with polydisperse particles, linear drag, one-dimensional tests // Journal of Computational Physics, 2021

Ближайшие планы

- трехмерные расчеты,
- учет объемной доли пыли.

Исследования проведены за счет средств гранта РФФ 19-71-10026.